

# Geheimnis des kürzesten Weges

Die Computermodelle des Mathematikers Prof. Peter Gritzmann knacken bisher ungelöste Probleme. Zum Beispiel finden sie die für alle Beteiligten beste Felderaufteilung bei der Flurbereinigung oder arrangieren die Leitungen auf einem Computerchip so, dass möglichst wenig Wärme entsteht

Link

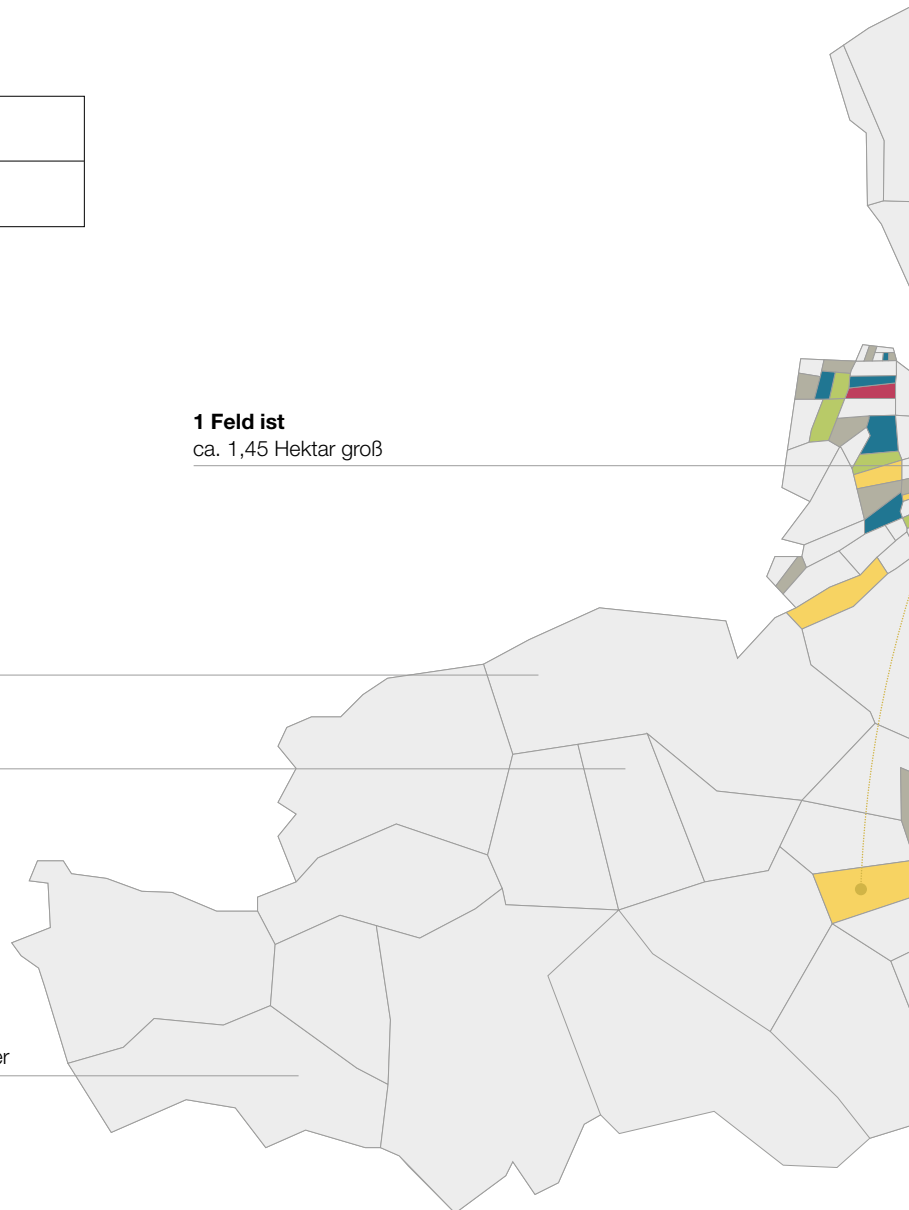
[www-m9.ma.tum.de](http://www-m9.ma.tum.de)

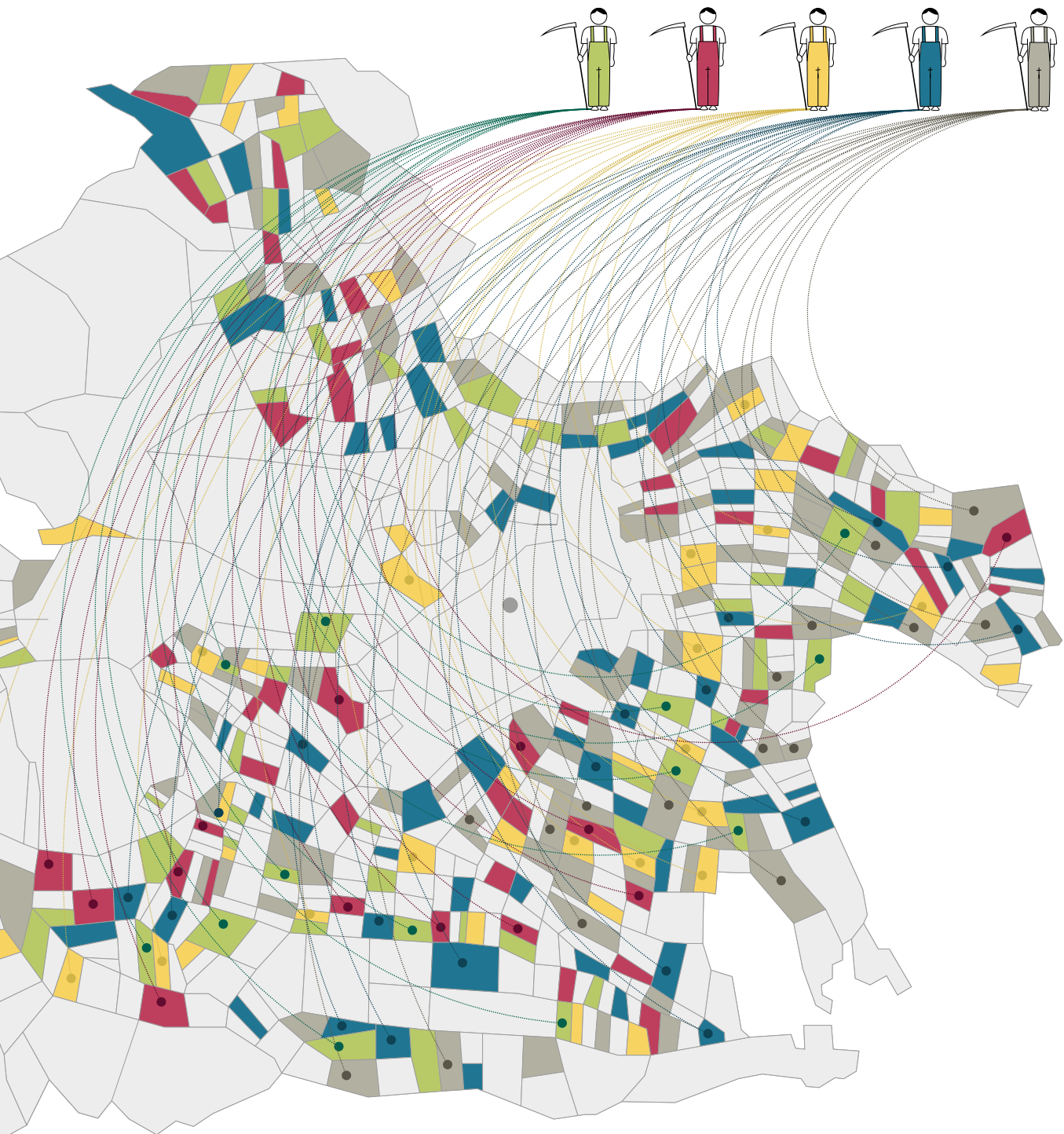
**1 Feld ist**  
ca. 1,45 Hektar groß

**Lange Fahrtwege**  
= Hohe Fahrtkosten

**140.000**  
Landwirte in Bayern

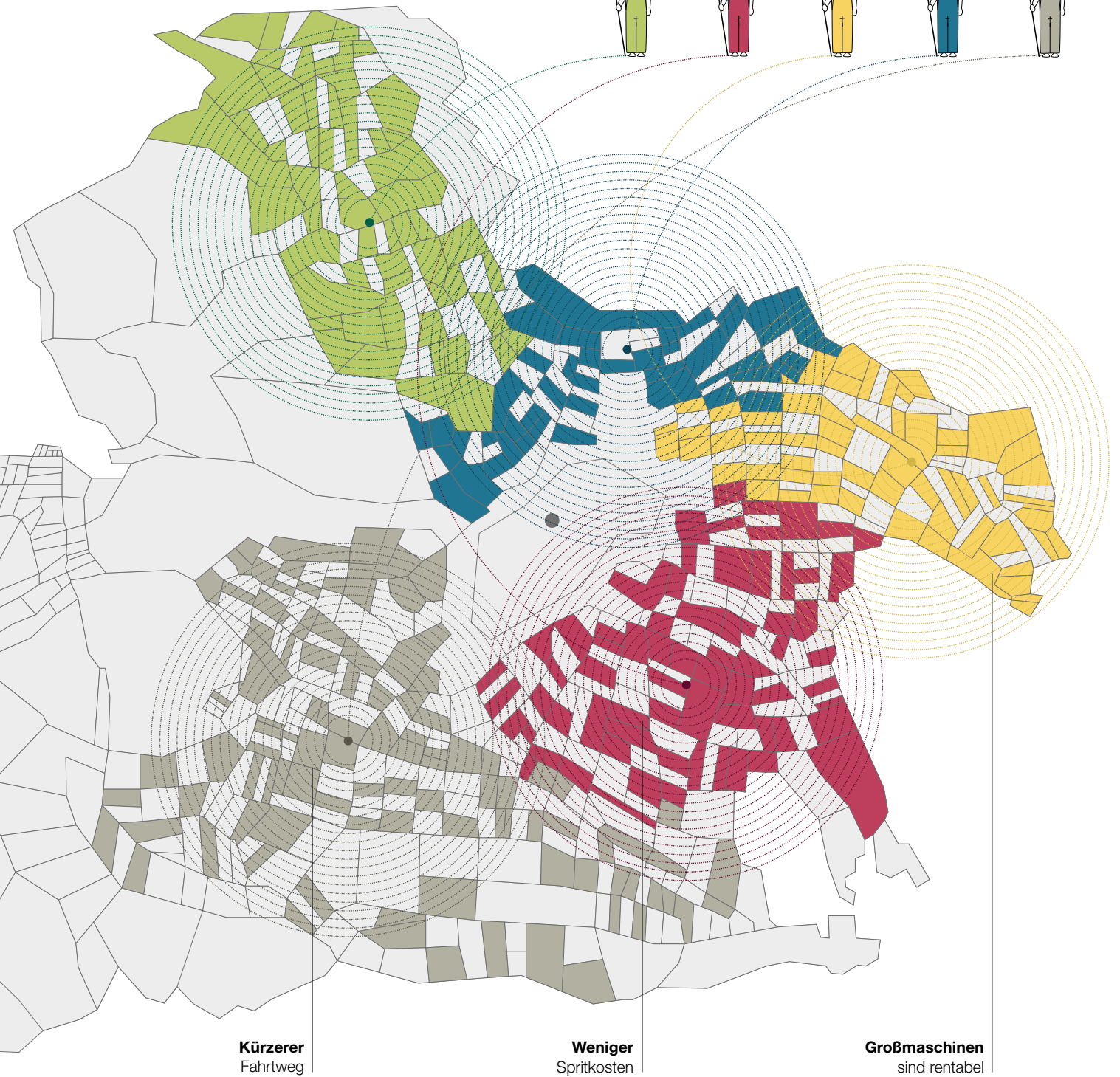
**1 Bauer**  
hat  $\approx$  12 Felder





Grafik: eclundsepp

**Teurer Flickenteppich:** Im Durchschnitt bewirtschaftet jeder der 140.000 bayerischen Bauern zwölf über die Region verteilte Felder. Die Fahrtkosten betragen bei typischen Betrieben mehr als zehn Prozent des Nettoeinkommens



**Kürzerer**  
Fahrtweg

**Weniger**  
Spritkosten

**Großmaschinen**  
sind rentabel

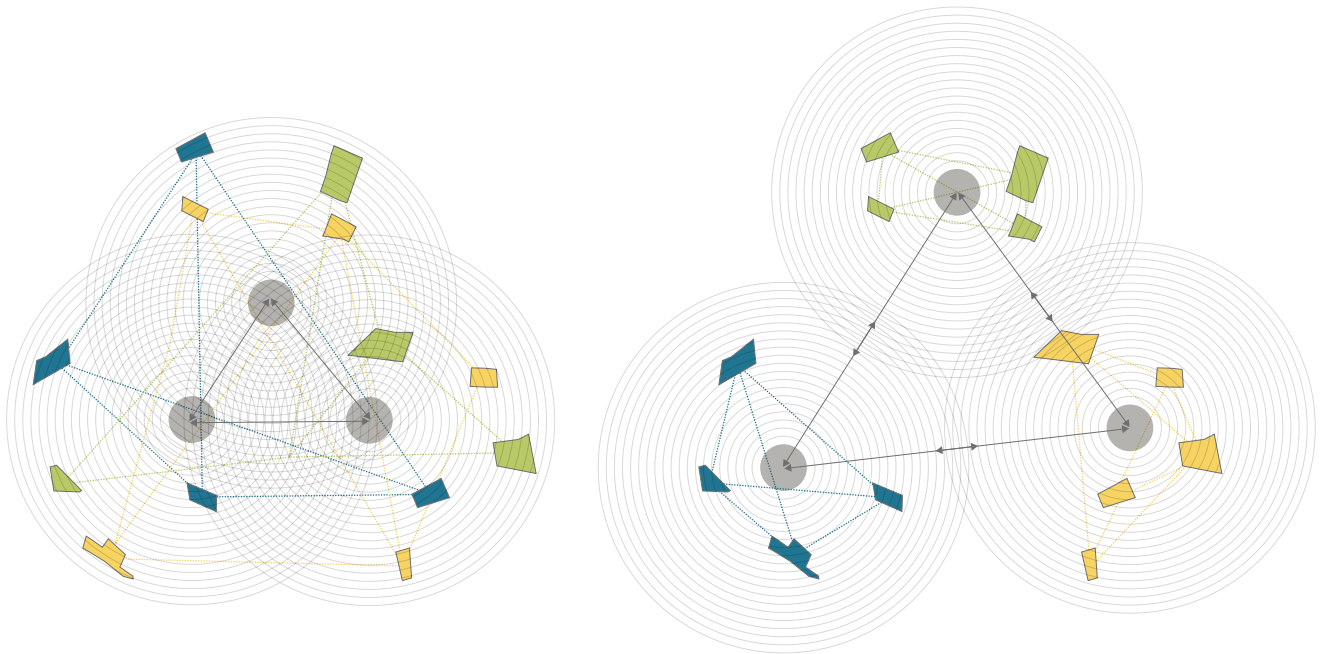
**Eine ideale Flurbereinigung**, die alle Felder jedes Landwirts zusammenlegt, scheitert an der unterschiedlichen Qualität der Felder, die getauscht werden müssten

**W**as ein Topmodell sein soll, ist Ansichtssache. Schließlich liegt Schönheit für viele im Auge des Betrachters. Fragt man zum Beispiel einen Wissenschaftler wie Peter Gritzmann, muss man mit einer Antwort rechnen, wie sie in den einschlägigen Castingshows wohl kaum zu hören wäre. Seine Topmodelle sind vielfältige, bisweilen unterm Strich ziemlich kantige Erscheinungen und entspringen der Mathematik. Für Gritzmann, der als Professor für Angewandte Mathematik am Zentrum Mathematik in Garching forscht und lehrt, besteht die Schönheit eines mathematischen Modells darin, dass es unklare, schwer durchschaubare Beziehungen auf den Punkt bringt und so mathematisch fassbar und praktisch zugänglich macht. Dazu modelliert er so lange an einer Formel herum und befreit sie von allem Überflüssigem, bis sie die optimale Lösung des Problems präsentiert und Verfahren zu ihrer Berechnung ermöglicht. „In der Mathematik hängt Schönheit eng mit Schlichtheit zusammen“, sagt er über die besondere Ästhetik seines Fachgebiets. Allerdings betreiben er und seine Kolleginnen und Kollegen in Garching die Feilerei an Algorithmen nicht als reine formalästhetische Denksportaufgabe. Diskret ist ihre Mathematik, weil sie sich mit abzählbaren und unterscheidbaren Phänomenen befasst – Mathematik also, die in

besonderer Weise mit der Computertechnologie verbunden ist, die mit den diskreten Zuständen 0 oder 1 arbeitet. Wenn sich Gritzmann auf die Suche nach einem Topmodell macht, geht es häufig um ganz konkrete Probleme aus dem echten Leben.

#### **Optimale Flurbereinigung**

In Gritzmanns wissenschaftlicher Arbeit wirken verschiedene Gebiete der Mathematik und Informatik zusammen. Geradezu bodenständig war das Projekt, bei dem Gritzmann und sein Kollege Prof. Andreas Brieden von der Universität der Bundeswehr ein mathematisches Verfahren zur Erleichterung der Flurbereinigung im landwirtschaftlichen Raum entwickelten. Wer schon einmal beim Landeanflug über dem Flughafen München einen Blick aus dem Fenster geworfen hat, verfügt über eine Vorstellung von dem Problem, das schon König Ludwig II. mit dem „Gesetz die Flurbereinigung betreffend“ lösen wollte. Aus der Vogelperspektive wirkt die Acker- und Wiesenlandschaft wie ein Flickenteppich aus farbigen Rechtecken unterschiedlicher Größe. Zwar entsteht dieses bunte Muster durch das Nebeneinander von braunem Ackerboden, grünen Wiesen und gelbem Getreide, doch würde man die Felder entsprechend der ▶



**Der Kniff von Gritzmans Computermodell besteht darin,** die Schwerpunkte aller Felder der Landwirte so auseinanderzuschieben, dass die Felder eines Landwirts möglichst nahe beieinanderliegen und weit von den anderen entfernt sind

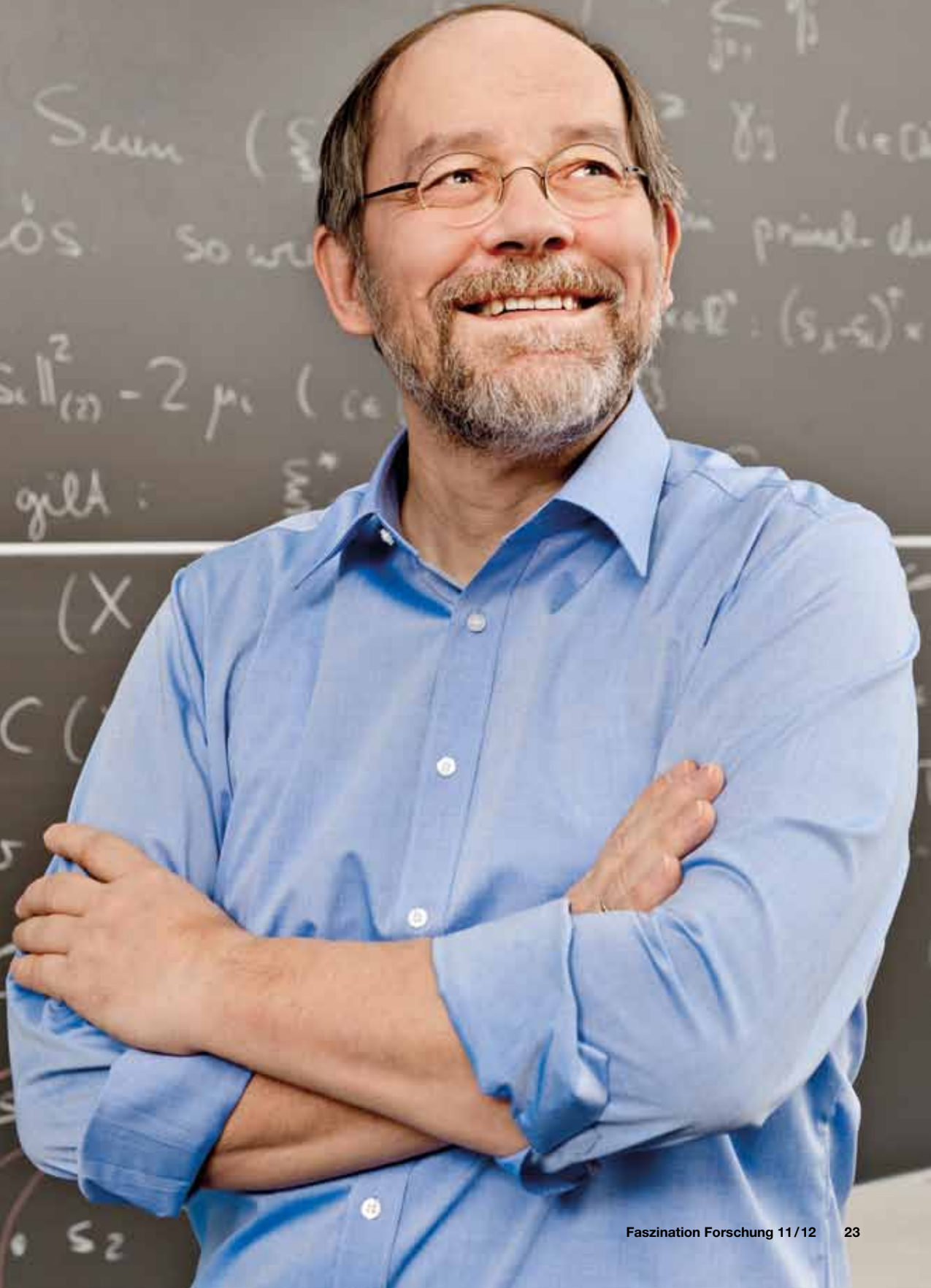
Besitzverhältnisse am Computer unterschiedlich einfärben, entstünde ein vergleichbares Muster: Kaum zwei Felder einer Farbe würden zusammenliegen. Mit seinem Gesetz von 1886 schuf der König erstmals eine zentrale Ordnungsbehörde, die dafür sorgen sollte, dass die verstreuten Flächen zu wirtschaftlich zu bearbeitenden Einheiten zusammengelegt werden. So weit der Plan. Einfach umzusetzen ist das aber nicht. Denn jeder der etwa 140.000 Landwirte in Bayern bewirtschaftet durchschnittlich zwölf über die Region verteilte Flurstücke mit einer durchschnittlichen Feldgröße von etwa 1,45 Hektar. „Daraus ergibt sich eine unvorteilhafte Kostenstruktur“, so Gritzmans. Die Landwirte müssen mit ihren Maschinen zwischen den weit verteilten Feldern hin- und herfahren. Die langen Fahrtzeiten kommen den Bauern teuer zu stehen, denn sie bedeuten unproduktive Zeit für Arbeitskräfte und Maschinen. „Außerdem ist auch kein wirtschaftlicher Einsatz moderner Großmaschinen möglich“, nennt Gritzmans einen weiteren Nachteil der kleinen Einzelflurstücke. Nach einer Berechnung der Bayerischen Landesanstalt für Landwirtschaft liegt bei typischen Betrieben allein der unproduktive Overhead der Fahrtkosten bereits in einer Größenordnung von mehr als zehn Prozent des Nettoeinkommens der betroffenen Landwirte. „Dies ist für

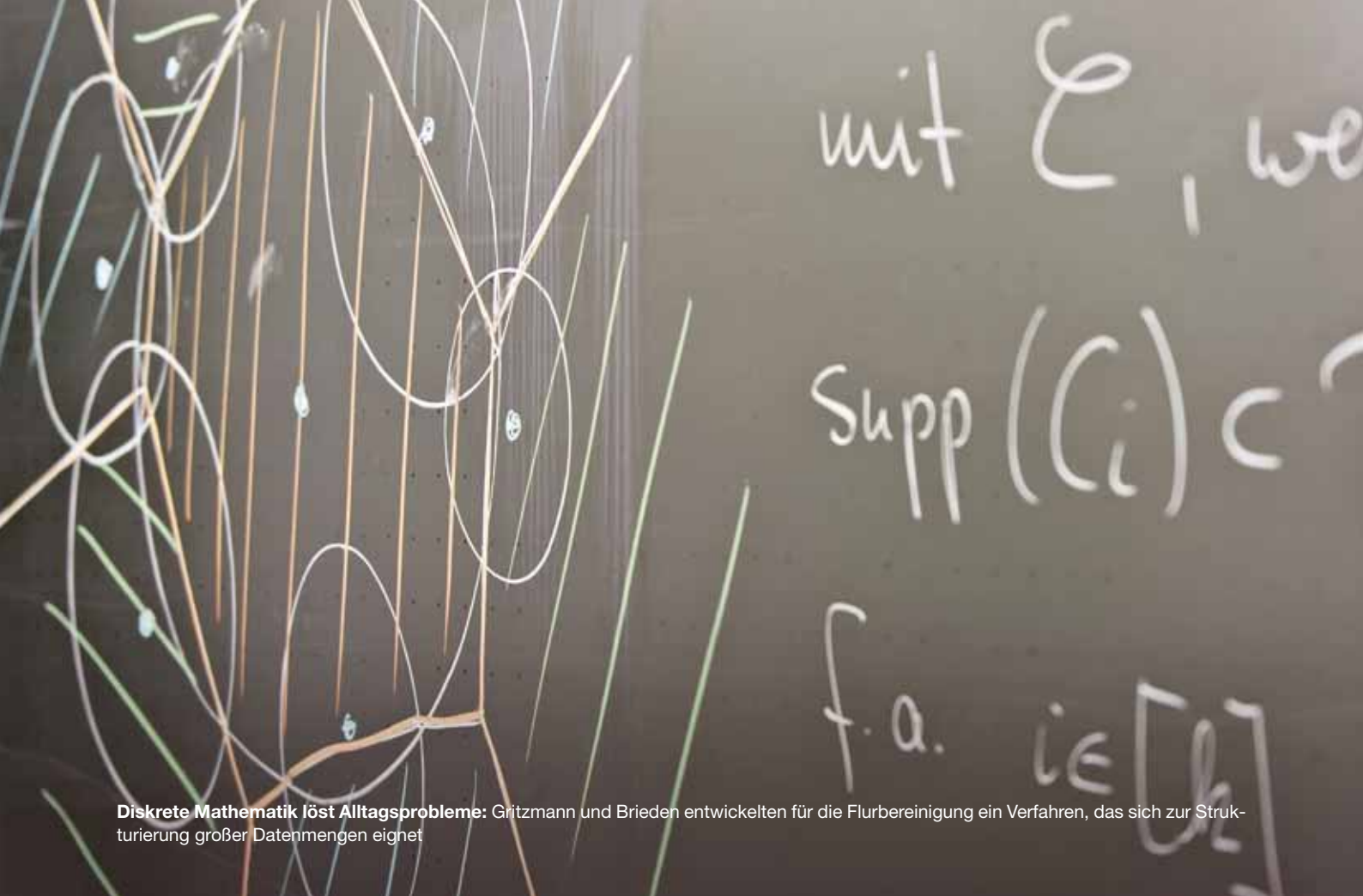
die Landwirte insbesondere nach der EU-Osterweiterung ein entscheidender, zum Teil existenzbedrohender Wettbewerbsnachteil, da in den Staaten des früheren Ostblocks in der Regel viel größere zusammenhängende Flächen bewirtschaftet werden.“

### Laptop statt Supercomputer

Dabei müssen gar nicht unbedingt neue Eigentumsverhältnisse geschaffen werden, was die Flurbereinigung in der Vergangenheit zu einer äußerst langwierigen Prozedur gemacht hat. Stattdessen bleiben im Rahmen eines freiwilligen Pacht- und Nutzungsaustauschs sämtliche Eigentumsverhältnisse unverändert. Lediglich das Recht zur Bewirtschaftung wird getauscht. Natürlich darf jeder Landwirt selbst entscheiden, ob und mit welchen Flurstücken er teilnehmen möchte. Die Idee hierzu ist nicht neu, scheiterte aber in der Praxis an den zu ihrer Umsetzung fehlenden mathematischen Methoden. Es gibt nämlich so viele Tauschmöglichkeiten, dass selbst ein Supercomputer für die Berechnung so lange brauchen würde, dass sich am Ende tatsächlich niemand mehr an die Ausgangsfrage erinnern könnte. „Wenn nur zehn Landwirte mit insgesamt 300 Feldern mitmachen, gibt es  $10^{300}$  verschiedene mögli- ▶

Mit seinem Modell können Landwirte den virtuellen Feldertausch proben: Peter Gritzmann hat mit Kollegen der Universität der Bundeswehr ein mathematisches Verfahren zur Erleichterung der Flurbereinigung entwickelt





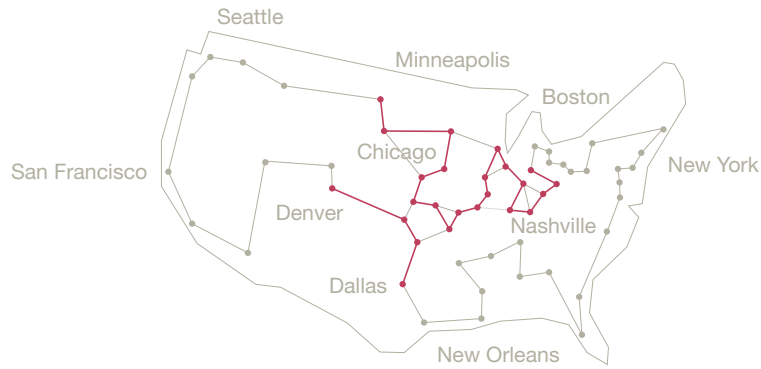
**Diskrete Mathematik löst Alltagsprobleme:** Gritzmann und Brieden entwickelten für die Flurbereinigung ein Verfahren, das sich zur Strukturierung großer Datenmengen eignet

che Zuordnungen“, so Gritzmann. „Das ist erheblich mehr als die Zahl der Atome im bekannten Universum.“

Für ihre Lösung des Problems entwickelten Gritzmann und Brieden ein Verfahren, das sich zur Strukturierung selbst größerer Datenmengen eignet und auch alle erforderlichen Bedingungen einhält. Es basiert auf einem völlig neuen Modell, das die Aufgabe beweisbar gut erfasst. Man kann tatsächlich exakt nachweisen, dass die erzeugten Tauschvorschläge die gesamte Flur „perfekt aufräumen“. Und das in beachtlichem Tempo: Der optimale Tausch kann auf einem Laptop innerhalb von Sekunden bestimmt werden. Der Ansatz der Forscher beruht auf der intuitiven Idee, die Schwerpunkte aller Felder der Landwirte auseinanderzuschieben, um so eine Zuordnung zu bestimmen, in der die einem Landwirt zugewiesenen Felder nahe beieinander und von den anderen weit entfernt sind. Auf diese Weise bestimmen Gritzmann und Brieden einen optimalen Tauschplan, der neben den Grundstücksgrößen auch die Bodenqualität oder eventuell vorhandene EU-Subventionen berücksichtigt; schließlich soll die Gesamtfläche für jeden Landwirt vorher und nachher etwa gleich sein, ebenso die Bodenqualität und die an die Felder gebundenen EU-Subventionen. In der Praxis kommen noch eine Reihe weiterer Bedingungen hinzu,

und natürlich werden nur solche Felder einbezogen, die die Landwirte in das Verfahren tatsächlich einbringen wollen. Danach ist die Flurkarte auf dem Computerbildschirm zwar immer noch schön bunt, aber farblich deutlich ordentlicher als zuvor. „Tatsächlich bietet diese Aufteilung jedem einzelnen Landwirt eine deutliche Kostenersparnis, weil nun die meisten seiner Felder beieinanderliegen und größere Schläge bilden“, sagt Gritzmann. Das sahen wohl auch die rund zwei Dutzend Bauern im fränkischen Oberstreu so, die sich als Teilnehmer des Pilotprojekts auf einen Feldertausch eingeladen hatten. Nach anfänglicher Skepsis zeigten sie sich bei der Vorstellung des Verfahrens auf einer ihrer Versammlungen zunehmend begeistert. „Unter anderem auch, weil sie selbst via Laptop und Beamer Varianten durchprobieren und deren Vorteile per Mausclick ausrechnen konnten“, erinnert sich der Forscher. Mittlerweile ist der Nutzungstausch jedenfalls längst praktisch umgesetzt, und aus den neuen Ergebnissen der Garchingener Forscher ist schon eine eigene Theorie geworden, die es ermöglicht, systematisch verborgene Strukturen in großen Datenmengen zu erkennen, mit einer Vielzahl neuer Anwendungsfelder. Für seine bahnbrechenden Arbeiten zur algorithmischen Konvexgeometrie, die auch für die Lösung des Problems aus der Landwirt-

**Das Problem des Handlungsreisenden**



Am Problem des Handlungsreisenden haben sich schon Generationen von Mathematikern und Informatikern seit seiner ersten Erwähnung im Jahr 1832 die Zähne ausgebissen. Perfiderweise klingt die Aufgabe stocksimpel: Der Vertreter muss Kunden in einer Reihe von Städten besuchen, und zwar in jeder Stadt genau einen. Da er möglichst wenig unterwegs sein möchte, sucht er die kürzeste Route. Die Entfernungen zwischen den einzelnen Städten sind bekannt. Gefragt ist also nach der optimalen Reihenfolge, in der die Städte besucht werden müssen. Bei fünf Städten sieht das Problem noch relativ leicht aus, denn da hat er noch übersichtliche 24 Möglichkeiten. Ein Ausprobieren aller Touren würde in diesem Fall zum Ziel führen. Doch wird es immer komplizierter, je größer die Zahl der Eingaben wird. Schon bei zehn Städten bestehen 362.880 Möglichkeiten, und damit wird diese

Strategie etwas aufwendig. Entsprechend komplizierter wird die Aufgabe mit steigender Anzahl der Städte und den damit ins Gigantische anwachsenden Möglichkeiten. Immerhin entstanden im Laufe der Zeit Methoden, mit denen auch kürzeste Wege bei Reisen durch Tausende von Städten gefunden werden können, und die Forschung geht weiter. Tatsächlich hat dieses Problem nicht nur eine Vielzahl von praktischen Anwendungen, für die schnelle Algorithmen benötigt werden. Es liegt auch im Kern eines der sogenannten Millenniumsprobleme der Mathematik, sieben zentrale offene Probleme, die das 20. dem 21. Jahrhundert vererbt hat. Kann man wasserdicht entscheiden, ob es für das Problem des Handlungsreisenden einen effizienten Algorithmus gibt, so erhält man ein Preisgeld von einer Million Euro. Aber vielleicht noch wichtiger: Es winkt die wissenschaftliche Unsterblichkeit.

Foto: Heddergott / TUM; Grafik: edlundsepp nach TUM

schaft entscheidende Grundlagen sind, wurde Gritzmann unter anderem mit dem Max-Planck-Forschungspreis ausgezeichnet.

**Lange Leitungen im Computerchip**

Mit kürzesten Wegen hat auch ein anderes Problem zu tun, mit dem sich die Garchingener Mathematiker unlängst erfolgreich befassten. Eigentlich kennt es jeder, der gern mit dem Laptop auf dem Schoß arbeitet. Üblicherweise werden die Geräte nach einer Weile heißer, als so manchem lieb ist. „Über die Hälfte des Stromverbrauchs heutiger Chips ist Abwärme“, so Gritzmann, der von einem Kollegen aus der Elektrotechnik um Rat gefragt wurde. Als er sich die Sache zusammen mit seinem Mitarbeiter Dr. Michael Ritter näher anschaute, wurde ihm klar, dass es dabei nicht allein um Bequemlichkeitsoptimierung geht. „Wenn bei einer Leistung von 100 Watt weltweit etwa eine Milliarde Computer auch nur eine halbe Stunde pro Tag laufen, so sind das mehr als 50.000.000 Kilowattstunden pro Tag – eine gigantische Energieverschwendung und ökologisch völlig inakzeptabel“, gibt er zu bedenken. „Auch für den Betrieb der Chips und die Akkulaufzeit ist das ein riesiges Problem.“ Eine aktive Kühlung der Laptops kommt als Lösung nicht infrage,

denn die würde den Computer vergrößern und zusätzlich Strom verbrauchen. Aus Sicht der Mathematiker präsentierte sich das Problem als eine Optimierungsaufgabe, die diskrete mit stetigen Zutaten verbindet. Das mathematische Modell erfasst dabei alle wesentlichen Einflussfaktoren der Abwärmeproduktion. Wenn ein Computer rechnet, werden die aus Einsen und Nullen bestehenden Ziffernfolgen durch Stromflüsse realisiert, indem ein Schalter an- oder ausgeht. Immer wenn Strom durch die winzigen, aber insgesamt einige Kilometer langen Drähte fließt, die in mehreren Schichten auf dem gerade einmal 200 Quadratmillimeter kleinen Chip liegen, entsteht ein elektrisches Feld und damit letztlich Wärme. Viel hängt davon ab, wie weit benachbarte Leitungen voneinander entfernt sind. Wenn man nun Leitungen, in denen seltener Strom fließt, näher aneinander vorbeiführt, gewinnt man den Platz, um jene mit hoher Schaltfrequenz und entsprechender Wärmeentwicklung möglichst weit auseinanderzubekommen. Dabei ist auch die Reihenfolge der Belegung der einzelnen Leiterbahnen zu optimieren. „Dadurch erhielt das Problem zusätzlich einen kombinatorischen Charakter, der an das Problem des Handlungsreisenden erinnert: ein klassisches Problem der Graphentheorie, das nach der kürzesten Rundreise durch alle Städte ▶



In einem modernen Computerchip liegen kilometerlange Drähte in mehreren Schichten verteilt. Immer wenn Strom fließt, entsteht Wärme. Abwärme macht heute mehr als die Hälfte des Stromverbrauchs eines Chips aus

fragt, die ein Handlungsreisender besuchen möchte“, fügt Gritzmann hinzu. Die Landkarte wird dabei stark abstrahiert: Die Städte werden zu Punkten, die Autobahnverbindungen zwischen ihnen zu Kanten; es entsteht ein sogenannter Graph. „Ein Graph ist eine sehr einfache Struktur, die es erlaubt, Abhängigkeiten zu modellieren“, erklärt er. Er besteht aus Knoten – das können zum Beispiel die Haltestellen eines Straßenbahnnetzes sein oder eben Drähte auf Computerchips – und Linien, die zwischen benachbarten Punkten gezogen werden. Diese Kanten setzen die beiden Knoten in eine je nach Aufgabenstellung aussagekräftige Beziehung. Das kann die Erreichbarkeit von Orten über Straßen, die Nachbarschaft von Feldern in der Landwirtschaft oder aber die gegenseitige Beeinflussung von Leitungen in einem Computerchip sein. Auch in diesem Fall war es wie so häufig in der Diskreten Mathematik, dass sich eine anschauliche Aufgabe als ausgesprochen harte Nuss erweisen kann. „Ein adäquates mathematisches Modell zu erstellen, war verhältnismäßig einfach. Es war allerdings mathematische Schwerstarbeit, seine Eigenschaften und damit die Struktur des Problems so genau zu analysieren, dass wir beweisbar effiziente Algorithmen entwickeln konnten“, erinnert sich Gritzmann an die vielen Versuche, das Problem in den

Griff zu bekommen. „Aber als wir den Beweis erst hatten, war der Weg zu schnellen, praktisch einsetzbaren Verfahren nicht mehr weit.“

Spricht man den Garchingener Mathematikprofessor darauf an, ob nicht mit jedem gelösten Problem die Gefahr zunimmt, dass der Mathematik die offenen Fragen ausgehen, lehnt er sich lächelnd zurück. „Die Anzahl der gelösten Probleme ist gegenüber der Menge der ungelösten verschwindend klein“, lautet sein schlichter Kommentar dazu. Er findet diese Situation keineswegs frustrierend. „Es wird immer viele wichtige Probleme geben, die gelöst werden müssen; die Arbeit geht den Mathematikern also bestimmt nicht aus.“ Für die Platzierung der Leitungen auf dem Mikrochip konnten sie jedenfalls die passenden Algorithmen finden. In vielen Bereichen gibt es ähnliche Probleme wie das Geheimnis des kürzesten Weges – angefangen von der Transportlogistik über das Design intelligenter Stromnetze für die neuen Energien bis hin zur Konstruktion besonders leistungsstarker Getriebe im Maschinenbau. „In zunehmendem Maße kommen die Fragen auch aus der Medizin und Biologie“, so Gritzmann. Und wer weiß, vielleicht begegnen sich hier ja eines Tages die verschiedenen Konzepte der Topmodelle.

Birgit Fenzel