

Lower Band (// links)

$\alpha^0$

$A_0$  (resources)

$P_1$  (players)

$A_1$

$P$

$A$

$f(x) + f(b-x) \geq f(a+b)$   
 $= f(b)$



$\bar{S}^*$  : players

$$w_i(\bar{S}^*) = \sum_{e \in S^*} \dots$$

$$= \left( \frac{\alpha^{i-1}}{\phi_d} \right)^{d_i}$$

$$\left[ \left( \frac{\alpha}{\phi_d} \right)^{i-1} \right]^d$$

$$\left( \frac{i}{k} \right)$$

# Operations Research – eine mathe- matische Wunderwaffe

Sie können die Lagerhaltung verbilligen, Verkehrsflüsse optimieren, Fahrpläne erstellen oder Schwarzfahrer einfacher aufspüren: Computeralgorithmen aus dem Gebiet Operations Research sind in der Lage, viele Abläufe zu verbessern. Professor Andreas S. Schulz entwickelt die dafür nötigen Verfahren weiter, erfindet neue und stößt dabei manchmal auf verblüffende Ergebnisse.

Link

[www.or.tum.de](http://www.or.tum.de)

## Operations Research – One of math's greatest secret weapons

E

Operations Research is a branch of mathematics primarily concerned with the modeling and optimization of economic processes. Algorithms are used to select the best alternative from many options to support decision-making in business. Andreas S. Schulz, Alexander von Humboldt Professor of Operations Research at TUM, refines the procedures, develops new ones, and often gains exciting new insights that help to advance the underlying theory. He was able to demonstrate, for instance, that a

warehousing problem is at least as difficult to solve as factoring integers. He also showed that the difference between a networked system where everyone seeks to benefit only themselves may function barely worse than a system where everyone acts in the general interest. Reaching beyond economic and business challenges, Schulz also applies his methods to social and humanitarian problems. □

**D**ass die theoretische Mathematik unser Leben mitunter ganz praktisch beeinflussen kann, dafür ist die Arbeit, die am Lehrstuhl für Operations Research (OR) in der Münchner Karlstraße vor sich geht, beispielhaft. Während unten in einem Laden glitzernde Helium-Ballons verkauft werden, die in den Himmel schweben, zerbrechen sich oben im 6. Stock Forscher den Kopf darüber, wie man bestimmte wirtschaftlich-mathematische Ideen zum Fliegen bringen kann. Konkret geht es darum, Verfahren zu entwickeln und zu verbessern, die ökonomische Abläufe abbilden und optimieren. In der Regel gibt es dabei sehr viele Kombinationsmöglichkeiten, und man muss die finden, die am günstigsten ist. „Dabei suchen wir nach Methoden, die sowohl mit großen Datenmengen zurechtkommen als auch mit Unsicherheiten“, sagt der Alexander von Humboldt-Professor Andreas S. Schulz, der seit 2015 diesen Lehrstuhl und gleichzeitig ein interdisziplinäres Forschungszentrum zwischen den Fakultäten für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften leitet. „Wir berücksichtigen dabei auch schwierige Umstände, etwa sich ändernde Umgebungen, den Schutz privater Daten und manchmal auch divergierende Zielvorstellungen.“

### Die optimale Reiseroute

Das klassische Problem der OR ist das des Handlungsreisenden (Travelling Salesman Problem, PST). Man versucht herauszufinden, in welcher Reihenfolge dieser seine Kunden aufsuchen muss, um die kürzest mögliche Strecke zurückzulegen. „Das Schöne an diesem Problem ist, dass es sehr praxisnah ist, allgemein verständlich, und jeder glaubt, schnell eine Lösung finden zu können“, betont Andreas S. Schulz. „Das für mich Faszinierende ist jedoch, dass das Problem mathematisch gesehen so schwer ist, dass man es auch nach jahrzehntelanger Forschung noch nicht generell lösen kann. Und es ist ein Prototyp für ähnlich gelagerte Aufgaben, bei denen man unter vielen Kombinationen die beste auswählen muss.“ Bei wenigen Kunden lassen sich die Wege noch errechnen und vergleichen. Aber die Anzahl der möglichen Wege steigt mit der Anzahl der Kunden schnell an: Bei 4 Kunden sind es 24 Möglichkeiten, bei 5 sind es 120. Hätte der Handlungsreisende 12 Kunden, beträgt die Anzahl der Reismöglichkeiten bereits mehr, als es Tippmöglichkeiten beim Lotto 6 aus 49 gibt. Und bei 25 Kunden wären es mehrere Trilliarden. ▶



**5**

**24**

**6**

**120**

**25**

620 448 401  
733 239 439  
360 000

Kunden

Anzahl möglicher Reiserouten

Beim Problem des Handlungsreisenden (auch Traveling Salesman Problem, TSP) versucht man herauszufinden, in welcher Reihenfolge dieser seine Kunden aufsuchen muss, um die kürzeste Strecke zurückzulegen. Im Bild oben sind zwei mögliche Routen gezeigt. Das TSP ist ein anspruchsvolles mathematisches Problem, nicht nur weil die Anzahl der möglichen Reiserouten extrem schnell ansteigt (siehe links).

Die besten Supercomputer würden Monate brauchen, um all diese Möglichkeiten durchzurechnen. Aus dieser Aufzählung ersieht man schon, dass es nicht möglich ist, das Problem durch reines Auflisten und Vergleichen der einzelnen Touren zu lösen, wenn es um mehrere hundert Kunden geht. Und bei 25 Kunden wären es mehrere Trilliarden.

Das Problem des Handlungsreisenden tritt in den verschiedensten Zusammenhängen auf, etwa bei der Logistik von Paketdiensten, aber auch bei der Organisation von Flugplänen, beim Bedienen von Hochregallagern, bei Pflegediensten oder beim Bohren von Löchern in Leiterplatten. Inzwischen haben Forscher Mittel und Wege gefunden, wie man sich einer guten Lösung zum Beispiel grafisch annähern kann. Einer der erfolgreichsten Ansätze ist der sogenannte Simplex-Algorithmus, der von George B. Dantzig von der Stanford University stammt. Aber man kann nicht mit Sicherheit sagen, ob man damit jeweils die optimale Lösung findet.

„Die Gründe, warum wir das Travelling-Salesman-Problem bis heute nicht eindeutig lösen können, liegen tief verborgen in der theoretischen Mathematik“, erklärt Schulz. „Nicht umsonst hat das Clay Mathematics Institute in Massachusetts seit dem Jahr 2000 eine Million Dollar ausgelobt für denjenigen, der es lösen oder beweisen kann, dass keine Lösung existiert.“

### Entstanden aus militärischen Anwendungen

Einst entwickelte sich OR aus Verfahren, die die Briten und Amerikaner im Zweiten Weltkrieg und später im Korea-Krieg anwandten, um militärische Strategien und den Waffeneinsatz zu verbessern. Erst in den fünfziger Jahren begannen auch zivile Wirtschaftsunternehmen, solche Optimierungen für ihre Zwecke zu verwenden.



### Wirtschafts-Nobelpreise für Probleme aus dem Gebiet OR

**1969: Jan Tinbergen und Ragnar Frisch** „für die Entwicklung und Anwendung dynamischer Modelle zur Analyse von Wirtschaftsprozessen“.

**1975: Leonid V. Kantorovich und Tjalling C. Koopmans** „für ihren Beitrag zur Theorie der optimalen Ressourcenverwendung“.

**1990: Harry M. Markowitz zusammen mit William F. Sharpe und Merton H. Miller** für „die Anwendung mathematischer oder computerbasierter Methoden für praktische Probleme, insbesondere Geschäftsentscheidungen unter Unsicherheit“.

**1994: John C. Harsanyi zusammen mit John F. Nash Jr. und Reinhard Selten** „für ihre grundlegende Analyse des Gleichgewichts in der nicht kooperativen Spieltheorie“.

**2012: Alvin E. Roth** „für die Theorie der stabilen Verteilung und Marktgestaltung“.



Die Frage nach einer optimalen Lagerhaltungsstrategie kann sehr anspruchsvoll sein: Bei zwei oder mehr verschiedenen Produkten, die gemeinsam bestellt werden können, aber nicht müssen, ist bisher kein effizienter Algorithmus zum Bestimmen einer Lösung bekannt, der die Kosten minimiert.



„Es passiert mir mitunter, dass man ein Problem sieht und denkt: Ah, da kenne ich doch eine Technik, die könnte man dafür ausprobieren“, sagt Professor Schulz.

Bald entstand auch eine wissenschaftliche Gemeinschaft, die sich mit dem Thema befasste. Mittlerweile wurden schon drei Nobelpreise für Wirtschaftswissenschaften an Forscher vergeben, die Entdeckungen auf dem Gebiet des OR gemacht haben. (siehe Kasten)

Man kann heute Programme kaufen für Lagerhaltung, Betriebsabläufe und Logistik; Schulen verwenden solche Algorithmen zur Stundenplan-Erstellung und die Bahn zur Entwicklung ihrer Fahrpläne. Trotzdem ist Operations Research bei vielen Unternehmen noch unbekannt. „Das hängt vielleicht an dem sperrigen Namen“, meint Schulz und blickt in dieser Hinsicht etwas neidisch auf die Kollegen von der Artificial Intelligence. Und es liegt auch daran, dass man zum Anwenden von OR einiges Hintergrundwissen benötigt. „Es gibt Standardsoftware“, sagt der Professor, „aber meine Erfahrung ist, dass jedes Unternehmen Besonderheiten hat, für die diese meist nicht ausreicht. Oft muss man da erst ein passendes Modell bauen, das die speziellen Bedingungen abbildet.“

Schulz gehört weltweit zu den renommiertesten Wissenschaftlern auf dem Gebiet des Operations Research. Er studierte und promovierte an der Technischen Universität Berlin und erregte schon mit seiner Doktorarbeit Aufsehen in Fachkreisen. ▶

Bereits im Alter von 29 Jahren wurde er vom Massachusetts Institute of Technology (MIT) in Cambridge, USA, als Professor für Mathematics of Operations Research berufen, später hatte er dort den Lehrstuhl des Patrick J. McGovern Chair of Management inne. Am MIT blieb er 17 Jahre lang, unterbrochen von Gastaufenthalten an anderen Universitäten, bevor er im Jahr 2015 einem Ruf an die TUM folgte. Fast im Jahresrhythmus erhielt er Preise und Auszeichnungen für seine wissenschaftliche Arbeit, und seine Erkenntnisse lösten nicht nur lang untersuchte Probleme, sondern haben auch konkrete Auswirkungen auf die praktische Anwendung.

### Ideen unter der Dusche

Auf gute Ideen kommt er oft im Gespräch mit Kollegen: „Auf Fachkonferenzen sind zum Beispiel so viele Vorschläge und Probleme präsent. Da passiert es mitunter, dass man ein Problem sieht und denkt: Ah, da kenne ich doch eine Technik, die könnte man dafür ausprobieren. Oder man hört von einer neuen Technik und denkt: Die könnte ich bei einem meiner Probleme benutzen. Einmal ist es mir passiert, dass in einer Sitzung drei Vortragende über jeweils etwas anderes gesprochen haben, aber ich hatte am Ende das Gefühl, dass sie alle das Gleiche gesagt hatten, ohne es zu merken. Ich habe dann im folgenden Jahr eine gemeinsame Sprache für all diese Probleme entwickelt.“ Aber auch zu Hause gibt es Gelegenheiten zu Diskussionen: „Manchmal kommt ein Gast ans Institut und trägt etwas vor. Man ist dann ganz fasziniert und behält das im Kopf“, sagt Schulz. „Irgendwann hat man dazu eine Idee, sei es beim Spaziergehen oder unter der Dusche. In der Mathematik ist es ganz wichtig, dass Dinge ins Unterbewusstsein gehen.“ Den Computer benutzt er nur, um eine Vermutung oder Idee auszutesten oder kurz mal etwas auszurechnen.

Diese Vorgehensweise empfiehlt Andreas S. Schulz auch seinen Studenten und Doktoranden: „Ich sage meinen Mitarbeitern oft: Es ist wichtig, dass man Dinge tief versteht, dann kommen irgendwann die Lösungen von selbst. Man kann nicht bewusst darauf hinarbeiten. Wir können uns zwar große offene Probleme vornehmen, aber die lösen wir in ein oder zwei Jahren vermutlich nicht. Man findet dann jedoch andere spannende Fragen und kann zumindest Teillösungen aufstellen.“



Auf gute Ideen kommt Andreas S. Schulz oft im Gespräch mit Kolleginnen und Kollegen.

Dies ist immer wieder passiert, etwa bei der Berechnung der optimalen Lagerhaltung. Es geht hier um ein Problem, für das es ebenfalls bis heute keine mathematisch eindeutige Lösung gibt, obwohl es eigentlich recht einfach wirkt: Betrachtet man die Bestellkosten und stellt sie den Kosten für die Lagerhaltung gegenüber, so lässt sich für ein einzelnes Produkt leicht errechnen, in welchen Intervallen dieses geliefert werden muss, um die Gesamtkosten möglichst niedrig zu halten. Aber schon bei zwei Produkten mit unterschiedlichen Daten gibt es keine eindeutig berechenbare beste Lösung mehr. Die Frage, warum dies so ist, lässt einem Mathematiker wie Andreas S. Schulz natürlich keine Ruhe.

Ihm ist es inzwischen immerhin zusammen mit seinem Team gelungen zu zeigen, dass das Problem ebenso schwierig zu lösen ist wie die Faktorisierung ganzer Zahlen. Bei dieser geht es darum, für Zahlen deren ganzzahlige Teiler anzugeben. Reines Ausprobieren führt bei sehr großen Zahlen zu einem Rechenaufwand, der alle realen Möglichkeiten übersteigt. Multipliziert man beispielsweise zwei sehr große Primzahlen miteinander, ist



Auch zur Planung und Optimierung von Verkehrsstrassen sind Verfahren des OR geeignet.

das kein Problem. Kennt man aber nur das Produkt, ist es extrem schwer, die beiden Teiler aufzuspüren. Dies macht man sich beim RSA-Verschlüsselungsverfahren zunutze, das heute häufig angewendet wird.

### Braess-Paradoxon

Das Braess-Paradoxon ist ein unerwartetes Ergebnis der Netzwerktheorie. Es besagt, dass das Hinzufügen von Kapazität die Geschwindigkeit eines Netzwerks verlangsamen kann. Auf Verkehrswege angewendet bedeutet das Braess Paradox, dass zusätzliche Straßen den Verkehr verlangsamen können, oder dass die Sperrung von Straßen den Verkehr beschleunigen kann. So geschah es zum Beispiel in New York, als am 22. April 1990 die 42nd Street nahe dem Times Square am Earth Day für den Verkehr gesperrt wurde. Jeder hatte vorausgesagt, dass ein Verkehrschaos eintreten würde, aber man hatte sich geirrt – der Verkehr verteilte sich reibungslos auf die anderen Straßen.

### Der Preis der Anarchie

Ein anderes Problem, das ebenfalls im Alltag große Bedeutung hat und dessen Lösung mitunter dem gesunden Menschenverstand widerspricht, wurde vor 20 Jahren zum ersten Mal untersucht. Die Frage lautet: Wenn in einem vernetzten System jeder das tut, was für ihn selbst am besten ist, um wieviel ungünstiger funktioniert dann das Gesamtsystem im Vergleich zu dem Zustand, wenn alle das tun, was für die Gemeinschaft am besten ist? Oder mit anderen Worten: Was kostet die Anarchie?

Beispiel Verkehrsfluss: Jeder sucht den seiner Ansicht nach schnellsten Weg, aber man könnte die Autos auch über Leitsysteme so lenken, dass sich Staus vermeiden lassen. Modelliert man diese Systeme mathematisch, zeigt sich überraschenderweise, dass eine zusätzliche Straße die Fahrzeit verlängern kann. Dieser Effekt, der etwa in 50 Prozent der Fälle auftritt, wurde bekannt als Braess-Paradox, 1968 entdeckt vom deutschen Mathematiker Dietrich Braess (siehe Kasten). ▶

*„Es ist wichtig, dass man Dinge tief versteht, dann kommen irgendwann die Lösungen von selbst.“*

*Andreas S. Schulz*

Dass dieser Effekt auch in der Praxis vorkommt, wurde beispielsweise in New York City gezeigt, als am Earth Day am 22. April 1990 die 42. Straße für den Autoverkehr gesperrt wurde. Alle sagten ein großes Verkehrschaos voraus, aber es blieb aus, denn der Verkehr verteilte sich gleichmäßig auf andere Straßen.

Andreas S. Schulz hat versucht, das zu analysieren, und hat für den Preis der Anarchie einen „superschönen geometrischen Beweis gefunden, der heute auch in den Lehrbüchern steht.“ Er konnte zeigen, dass bei einer bestimmten Art von Fahrverhalten die schlimmstmögliche Lösung nur 33 Prozent schlechter als die bestmögliche ist. „Das sind allerdings idealisierte Annahmen“, sagt er. „Man kann das für realistische Straßennetze noch ein bisschen verfeinern. Dann findet man heraus, dass man im schlimmsten Fall 36 Prozent verliert.“

Man kann mit Operations Research viel Geld einsparen. So hat beispielsweise Jannik Matuschke, ein Kollege von Schulz, der im Januar Professor an der Universität Leuven wurde, in seiner Doktorarbeit gezeigt, dass ein Paketzusteller in Deutschland mit einem von ihm entwickelten OR-Programm eine Kostensenkung von 14 Prozent beziehungsweise 1,6 Millionen Euro im Jahr erreichen könnte. Andreas S. Schulz liegt aber viel daran, dass seine Verfahren nicht nur zur Maximierung des Profits von Firmen eingesetzt werden. Er möchte sie nutzen, um der Gesellschaft etwas zurückzugeben und auch Non-profit-Unternehmen zu unterstützen.

So könnte man damit beispielsweise auch die Verteilung von Hilfsgütern in Katastrophengebieten erheblich verbessern oder die Vermittlung von Spendernieren revolutionieren.

Angenommen, jemand spendet freiwillig eine Niere, egal an wen. Dann könnte man diese einem passenden Empfänger zuordnen, für den aber ein Verwandter sich bereit erklärt hat, ebenfalls eine Niere zu spenden. Diese könnte wiederum jemand anderem gegeben werden usw. So entsteht eine Kette von Empfängern, die mit kombinatorischen Verfahren optimiert werden kann, so dass schließlich jeder Empfänger eine möglichst gut passende Niere erhalte. „In den USA wurde das bereits realisiert“, sagt Schulz. „In der EU ist die Spende an fremde Empfänger bisher verboten, deshalb ist diese Art von Vermittlung bei uns noch nicht möglich. Aber das ließe sich sicherlich durch eine Gesetzesmodifikation leicht ändern.“

Insgesamt sieht Andreas S. Schulz eine neue Ära für OR heraufziehen: „Durch die Verknüpfung von Informatik, Mathematik und Ökonomie tun sich neue Möglichkeiten und Anwendungsfelder auf. Wir können bei unseren Methoden zunehmend auch immaterielle Faktoren wie Anreize, Netzwerke und Unsicherheiten mit einbeziehen. Das versetzt uns in die Lage, auch kritische soziale Herausforderungen anzugehen.“ ■

*Brigitte Röthlein*




---

 Prof. Andreas S. Schulz
 

---

## Mathematiker mit Blick für ökonomische Fragestellungen

Prof. Andreas S. Schulz, geb. 1969, studierte angewandte Mathematik an der Technischen Universität Berlin, wo er 1996 promovierte. Danach war er dort zwei Jahre lang Assistenzprofessor, bevor ihn das Massachusetts Institute of Technology (MIT) nach Cambridge, USA, berief. Dort stieg er vom Assistenzprofessor zum Patrick J. McGovern Professor of Management and Professor für Mathematics of Operations Research auf. Als Humboldt-Forschungspreis-träger kehrte er zwischen 2011 und 2013 für einen Forschungs- und Lehraufenthalt an seine Alma Mater in Berlin zurück. Er hat zahlreiche Gastprofessuren ausgeübt, wie an der University of British Columbia, der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) Zürich und der Universität Maastricht. Zudem ist er Gründungsmitglied der Jungen Akademie in Berlin/Deutschland.

---